Lösungen Klausur Analysis IV

25.7.07

1) a) $$\frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{z^6}\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6z^3} + \frac{1}{120z} + \dots$$

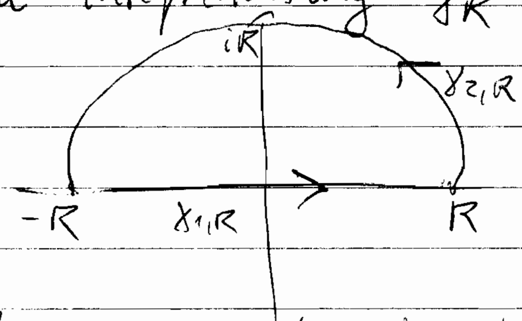
$$\Rightarrow \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^6} = \frac{1}{120}.$$

Da $z=0$ die einzige Singularität von $\frac{\sin z}{z^6}$ in $|z|<5$ ist, folgt aus dem Residuensatz

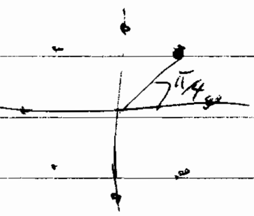
$$\int_{|z|=5} \frac{\sin z}{z^6}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{120}$$

b) Da $\frac{1}{1+x^4}$ gerade ist, gilt $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx$

Dieses Integral wird mittels des Residuensatzes mit dem Integrationsweg γ_R



Nullstellen von $1+x^4$ in oberer Halbebene



$$z^4 = -1 \Rightarrow z = e^{i\frac{\pi}{4}},\ e^{i\frac{3}{4}\pi}$$

Die anderen Nullstellen sind $e^{-i\frac{\pi}{4}}, e^{-i\frac{3}{4}\pi}$

Da die Nullstellen einfach sind, ist

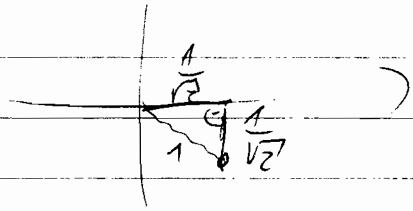
$$\operatorname{Res}_{e^{i\frac{\pi}{4}}} \frac{1}{1+z^4} = \left(\frac{1}{4z^3}\right)\Big|_{z=e^{i\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{3}{4}\pi}$$

und analog $\mathrm{Res}_{z=e^{i\frac{3}{4}\pi}} \frac{1}{1+z^4} = \frac{1}{4} e^{-i\frac{9}{4}\pi}$

$$= \frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

Wegen $e^{-i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$$e^{-i\frac{3}{4}\pi} = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}$$

(auch geometrisch klar: 

)

folgt schließlich

$$\int_{\gamma_{1,R}} \frac{1}{1+z^4}\,dz + \int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}} + \frac{-1-i}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\parallel$$

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

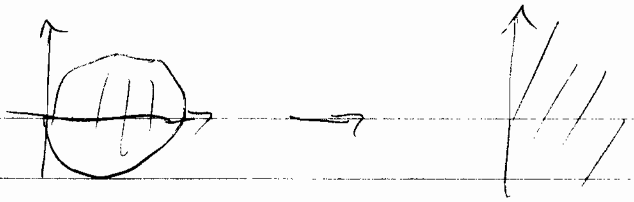
$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \cdot i \cdot (-2i) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

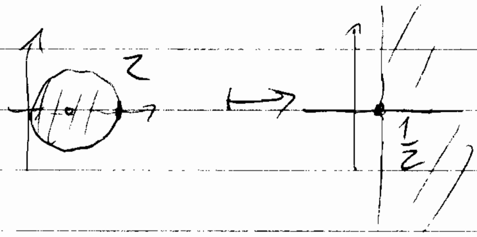
und wegen $\left|\frac{1}{1+z^4}\right| \leq \frac{1}{R^4-1}$ für $|z|=R$

ist $\left|\int_{\gamma_{2,R}} \frac{1}{1+z^4}\,dz\right| \leq \pi \cdot R \cdot \frac{1}{R^4-1} \to 0$ für $R \to \infty$

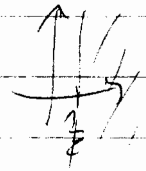
Mit $R \to \infty$ folgt also

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^4}\,dx = \boxed{\frac{\pi}{2\sqrt{2}}}$$

2) a) 

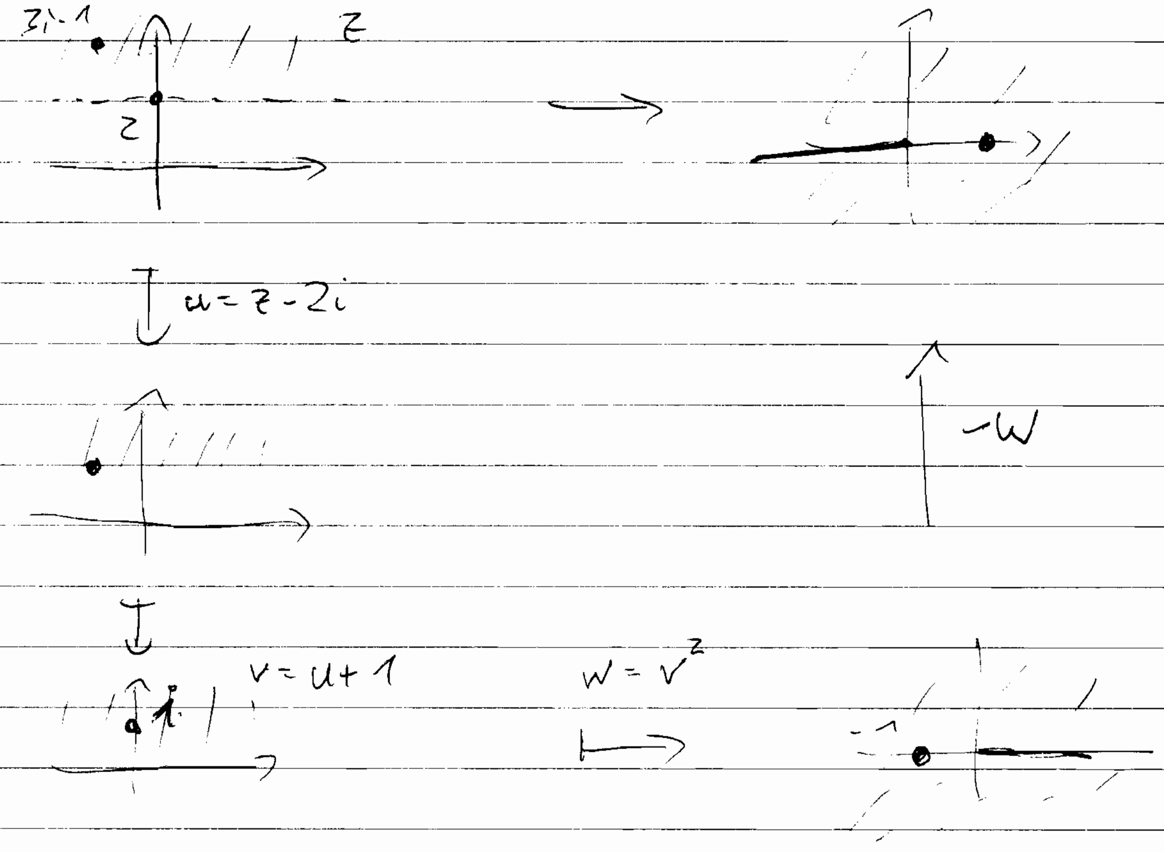
Inversion $z \mapsto \frac{1}{z}$ bildet 

ab, da $0 \mapsto \infty$, $2 \mapsto \frac{1}{2}$, Kreis durch 0, orthogonal zu x-Achse $\mapsto$ Gerade orthogonal zu x-Achse und $1 \mapsto 1$.

Da 

symmetrisch unter Konjugation ist, gilt dasselbe für $z \mapsto \frac{1}{z}$. Verschiebe nun um $\frac{1}{2}$ nach links:

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{2}$$

b) 

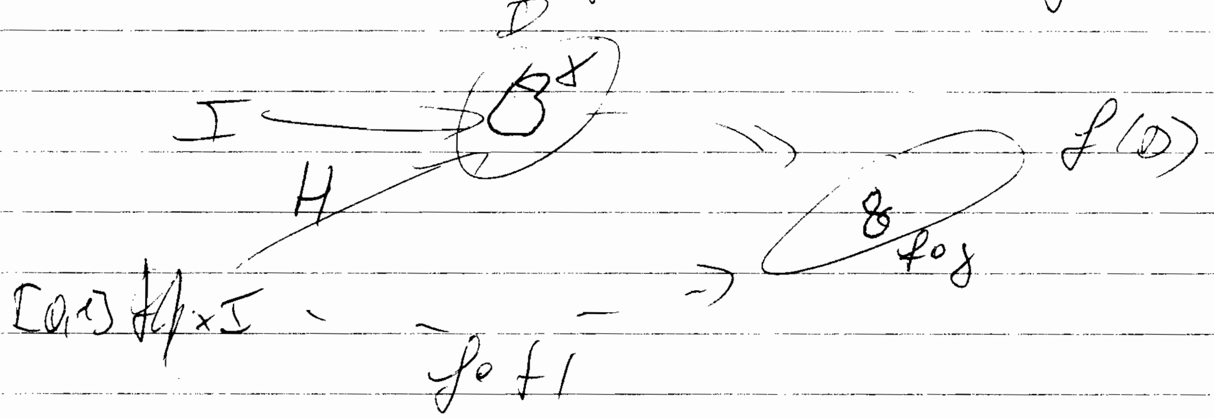
Also $f(z) = -w = -v^2 = -(u+1)^2$
$= -(z-2i+1)^2$

3) a) 1. Lösung: M bildet die reelle Achse auf sich ab, nach dem Spiegelungsprinzip folgt aus
$M(z) = z$ also $M(\bar{z}) = \bar{z}$.

2. Lösung: Wir wissen (aus einer Übungsaufgabe), dass sich M als
$$M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$
mit $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.
Aus $M(z) = z$ folgt also
$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \bar{z},$$ d.h.
$M(\bar{z}) = \bar{z}$.

b) Konforme Abbildungen von $\mathbb{H}$ auf sich sind Möbiustransformationen. Hat M zwei Fixpunkte in $\mathbb{H}$, so hat M nach a) zwei weitere Fixpunkte in $\{\operatorname{Im} z < 0\}$, insgesamt also 4 Fixpunkte.
Da eine Möbiustransformation bereits durch ihre Werte an 3 Punkten festgelegt ist (umsomehr bei 4!), folgt $M = \mathrm{id}$.

4.) a) Wahr. Ist $\gamma: I \to D$ und $H: [0,1] \times I \to D$ eine Homotopie zum konstanten Weg, so ist $f \circ H$ eine Homotopie von $f \circ \gamma$ zum konstanten Weg in $f(D)$.



b) falsch, zB $f(z) = z^2$ auf $D = \mathbb{C} \setminus \{x+iy : y=0, x \leq 0\}$.

D ist einfach zshg, $f(D) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aber nicht.

c) falsch, gleiches Beispiel wie b).

$(f(i) = f(-i) \Rightarrow$ nicht injektiv$)$.

(was stimmt: f ist lokal injektiv, d.h. jeder Punkt hat eine Umgebung, auf der f injektiv ist)